අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022(2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022(2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022(2023)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

※ ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $0<|p|<1$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $p^2x^2-2x+1=0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

இம்மூலங்கள் $\alpha, \beta\,(>\alpha)$ எனக் கொள்வோம். α, β ஆகிய இரண்டும் நேரெனக் காட்டுக.

$(\alpha-1)(\beta-1)$ ஆகியவற்றை p இற் கண்டு, $\alpha<1$ எனவும் $\beta>1$ எனவும் உய்த்தறிக.

$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ எனக் காட்டுக.

$\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}=\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|)}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$\left|\sqrt{\alpha}-1\right|, \left|\sqrt{\beta}-1\right|$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$|p|x^2-\sqrt{2(1-|p|)}\,x+\sqrt{2(1+|p|)}-|p|-1=0$ எனக் காட்டுக.

(b) $p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b\in\mathbb{R}$ ஆகும். $(x+2)$ ஆனது $p(x), p'(x)$ ஆகிய இரண்டினதும் ஒரு காரணியெனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு $p'(x)$ ஆனது x ஐக் குறித்து $p(x)$ இன் பெறுதியாகும். a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. a, b ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு $p(x)-3p'(x)$ ஐ முற்றாகக் காரணிப்படுத்துக.

12. (a) ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பழமேனும் கிடைக்கத்தக்கதாக, ஆறு மாம்பழங்களையும் நான்கு தோடம்பழங்களையும் எட்டு மாணவர்களிடையே, பகிர்ந்து கொள்ள வேண்டியுள்ளது.

(i) ஆறு மாணவர்களுக்கு ஒரு பழம் வீதமும் எஞ்சியுள்ள இரு மாணவர்களில் ஒரு மாணவனுக்கு இரு மாம்பழங்களும் மற்றைய மாணவனுக்கு இரு தோடம்பழங்களும்

(ii) ஏழு மாணவர்களுக்கு ஒரு பழம் வீதமும் மற்றைய மாணவனுக்கு மூன்று மாம்பழங்களும்

(iii) ஏழு மாணவர்களுக்கு ஒரு பழம் வீதமும் மற்றைய மாணவனுக்கு மூன்று பழங்களும்

கிடைக்கும் வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r=\dfrac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ எனக் கொள்வோம். அத்துடன் $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு

$f(r)=\dfrac{A}{(2r+1)}+\dfrac{B}{(2r+3)}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு A, B ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாகும். $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r=f(r)-f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $n\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{4}{5}-\frac{3}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ ஒருங்குகின்றது என்பதை உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}(U_r+kU_{r+1})=1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக மெய்ம் மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

13. (a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; எல்லா $a\in\mathbb{R}$ இற்கும் $\mathbf{A}^{-1}$ இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ஆகிய தாயங்கள் $\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ளன. $a=1$ எனக் காட்டுக.

a இன் இப்பெறுமானத்திற்கு $\mathbf{A}^{-1}$ ஐ எழுதி, இதிலிருந்து, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $z, w\in\mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம். $z\bar{z}=|z|^2$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, $|z+w|^2=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})+|w|^2$ எனக் காட்டுக.

$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ என்பதை உய்த்தறிந்து, ஆகண் வரிப்படத்தில் $z, w, 0$ ஆகியவற்றை வகைகுறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரேகோட்டில் இல்லாதபோது இதற்கு ஒரு கேத்திரகணித விளக்கத்தைத் தருக.

(c) $z=-1+\sqrt{3}i$ எனக் கொள்வோம். z ஐ வடிவம் $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r>0$ உம் $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ உம் ஆகும்.

$n\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $z^n=a_n+ib_n$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a_n, b_n\in\mathbb{R}$ ஆகும். $m, n\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $\mathrm{Re}\left(z^m\cdot z^n\right)$ ஐ a_m, a_n, b_m, b_n ஆகியவற்றில் எழுதுக.

z^{m+n} ஐக் கருதி, த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $m, n\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $a_m a_n-b_m b_n=2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

14. (a) $x\neq -2$ இற்கு $f(x)=\frac{2x+3}{(x+2)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x\neq -2$ இற்கு $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடையையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

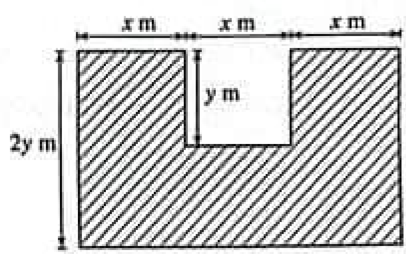
அத்துடன், $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$x\neq -2$ இற்கு $f''(x)=\frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y=f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி, $y=f(x)$ இன் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

$[k, \infty)$ மீது $f(x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் k இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தை எடுத்துரைக்க.

(b) படத்திற் காட்டப்பட்ட நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $45\ \mathrm{m}^2$ ஆகும். இது நீளம் $3x$ m ஐயும் அகலம் $2y$ m ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வகத்திலிருந்து நீளம் x m ஐயும் அகலம் y m ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வகத்தை அகற்றுவதனால் பெறப்பட்டுள்ளது. நிழற்றிய பிரதேசத்தின் சுற்றளவு L m ஆனது $x>0$ இற்கு $L=6x+\frac{54}{x}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.



L குறைந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15. (*a*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^2+x+2=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\dfrac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எழுதி, $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(*b*) $1+\sin 2x = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = 1$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$ எனக் கொள்வோம். பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $I = -\dfrac{\pi^2}{8}+J$ எனக் காட்டுக; இங்கு $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$.

தொடர்பு $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐயும் (*b*) இல் உள்ள பேறையும் பயன்படுத்தி J இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $I = \dfrac{\pi}{8}(2-\pi)$ எனக் காட்டுக.

16. $P \equiv (x_0, y_0)$ எனவும் l ஆனது $ax+by+c=0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். P இலிருந்து l இற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

l_1, l_2 ஆகியன முறையே $4x-3y+8=0, 3x-4y+13=0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளெனக் கொள்வோம். l_1 உம் l_2 உம் $A \equiv (1, 4)$ இல் இடைவெட்டுகின்றனவெனக் காட்டுக.

l_1 இற்கும் l_2 இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கியின் பரமானச் சமன்பாடுகளை $x=t$, $y=t+3$ என எழுதலாம் எனவும் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

இதிலிருந்து, l_1, l_2 ஆகிய இரு கோடுகளையும் தொடுவதும் l_1 இற்கும் l_2 இற்குமிடையே கூர்ங்கோணம் அடங்கும் பிரதேசத்தில் இருப்பதுமான வட்டம் எதனதும் சமன்பாடு $(x-t)^2+(y-t-3)^2=\dfrac{1}{25}(t-1)^2$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}, t \neq 1$.

மேற்குறித்த வட்டங்களிடையே A ஐ மையமாகக் கொண்டதும் ஆரை 1 ஐ உடையதுமான வட்டத்தை நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. (*a*) $\cos(A+B)$ ஐ $\cos A, \cos B, \sin A, \sin B$ ஆகியவற்றில் எழுதி, $\sin(A-B)$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெறுக.

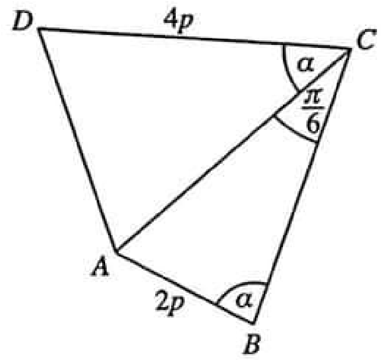
$k \in \mathbb{R}$ எனவும் $k \neq 1$ எனவும் கொள்வோம். $k>1, k<1$ என்னும் வகைகளை வெவ்வேறாகக் கருதிக்கொண்டு $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ ஐ வடிவம் $R\cos(\theta+\alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு k இல் $R(>0)$ உம், $\alpha(0<\alpha<2\pi)$ உம் துணியப்பட வேண்டிய மெய்ம் மாறிலிகளாகும்.

இதிலிருந்து, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$ ஐத் தீர்க்க.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB=2p$, $CD=4p$, $A\hat{C}B=\frac{\pi}{6}$, $A\hat{B}C=A\hat{C}D=\alpha$ ஆகும்.

$AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $AD=4p$ எனின், $\alpha=\tan^{-1}(2)$ எனக் காட்டுக.



(*c*) $x>1$ இற்கு $\tan^{-1}(\ln x^{\frac{2}{3}})+\tan^{-1}(\ln x)+\tan^{-1}(\ln x^2)=\frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

***